

MATEMATICAS FINANCIERAS

Fuente: Evaluación Financiera de Proyectos | Arturo Infante

Prof: Jairo Crazco F.

Este material está *dirigido* a toda persona interesada en aprender los fundamentos de la matemática financiera, los cuales les dará las herramientas necesarias para entender y manejar de manera eficiente el dinero. El texto es útil para estudiantes que se inician en preparatoria o licenciatura en las áreas de contabilidad, economía, finanzas, administración de empresas y como auxiliar en los cursos de ingeniería económica y evaluación de proyectos de inversión. Asimismo, es útil como referencia para estudiantes de maestría en las áreas mencionadas.

La matemática financiera es una parte de la matemática aplicada que estudia los modelos matemáticos relacionados con los cambios cuantitativos que se producen en las sumas de dinero, llamadas *capitales*.

Sobre los inicios de la Matemática Financiera no se sabe gran cosa, simplemente que ésta ha existido desde tiempo inmemorial. La aritmética comercial estaba bien desarrollada para el 1500 a.c. y parece ser que la matemática financiera se desarrolló como un complemento a las transacciones comerciales. Sin embargo, no se conoce cuándo y quién introduce los conceptos fundamentales en los que se basa. Por ejemplo, del concepto de interés simplemente sabemos que surgió cuando una persona se dio cuenta que si alguien le debía dinero, él debía recibir una compensación por el tiempo que esta persona tardara en cancelar la deuda.

La importancia de la matemática financiera radica en su aplicación a las operaciones bancarias y bursátiles, en temas económicos y en muchas áreas de las finanzas, ya que le permiten al administrador financiero tomar decisiones de forma rápida y acertada. Asimismo, es la base de casi todo análisis de proyectos de inversión, ya que siempre es necesario considerar el efecto del interés que opera en las cantidades de efectivo con el paso del tiempo.

Una Inversión vista de la forma más elemental, es en esencia un intercambio de sumas de dinero; es la oportunidad de entregar ciertas cantidades en momentos definidos, a cambio de recibir otras sumas, en otros momentos, también específicos. Por ejemplo, cuando enfrentamos la oportunidad de colocar dinero a interés, estamos examinando un proyecto de inversión consistente en entregar ahora una suma y en el momento pactado del reembolso, recibirla de vuelta, aumentada con el valor de los intereses.

El concepto de interés aparece relacionado con la preferencia que expresan las personas por recibir dinero ahora en lugar de obtenerlo más tarde. Esta preferencia caracteriza al sistema económico capitalista, según el cual, los recursos financieros tienen la capacidad de *generar riqueza* con el transcurso del tiempo. Realmente acontece que las cantidades de dinero disponible tienen la potencialidad de crecer cuando se invierten en alternativas productivas.

Si disponemos de \$ 1'000 en la actualidad y los guardamos durante un mes en la caja fuerte, al final de este período tendremos el mismo \$ 1'000 que poseíamos al comienzo. Por el contrario, si invertimos ese \$1'000 en la adquisición de una mercancía que al cabo de un mes revendemos en \$ 1'500, la suma inicial habrá crecido en \$ 500, es decir en un 50%.

Al primer inversionista lo tendrá sin cuidado que le entreguen el dinero ahora o dentro de un mes, ya que el destino que le dará a estos recursos será el de dejarlos inactivos. En contraste, el inversionista que sigue el segundo camino se beneficia con el crecimiento que experimentará el \$ 1'000 al *invertirlo* en la compra de la mercancía y por este motivo, preferirá recibirlos ahora.

La preferencia por recibir el dinero antes y no después se incorpora a través del concepto de la *tasa de interés*, que sirve para cuantificar la oportunidad que el dinero tiene de crecer. Se debe observar que la tasa de interés es un concepto relativo a quien posee o controla el dinero, ya que el aumento que éste puede experimentar depende de las oportunidades de inversión de tal individuo o entidad. Como estas oportunidades varían de una persona a otra y de una entidad a otra, la tasa de interés cambia consecuentemente en la misma forma. Más adelante ampliaremos este concepto, ya que constituye la espina dorsal del análisis relativo a la evaluación financiera de las alternativas de inversión mediante la aplicación de las Matemáticas Financieras.

También es un proyecto de inversión la compra de un billete de la lotería. En este caso, lo que acontece es que no existe certidumbre sobre el monto del reembolso, aunque sí sobre el momento en que éste será

recibido. El ingreso futuro depende del resultado del sorteo y puede oscilar entre cero y el valor del premio mayor. Si el número del billete comprado resulta ser el del premio mayor, el ingreso será igual al valor de tal premio. Si no coincide con el premio mayor, ni con los premios secos, ni aproximaciones, el ingreso futuro será cero.

En los proyectos de inversión el grado de incertidumbre puede ser mayor y puede incluir las fechas en las cuales se producen los ingresos y egresos y la magnitud de éstos. Como ilustración está el caso de la inversión en el engorde de ganado cuyos ingresos y egresos no se pueden predeterminar con mucha certeza. Intervienen variables de tipo fisiológico sobre las cuales el grado de control es limitado y sobre todo, desde el punto de vista de un individuo, las variables del mercado, que tienen un decisivo efecto en los precios finales de venta, escapan a su control. Además, su capacidad de predicción sobre ellas es frecuentemente baja.

El análisis de una inversión desde el punto de vista financiero, se puede clasificar en tres grandes grupos, de acuerdo con la clase de pregunta que se busca responder:

1. ¿Es conveniente financieramente emprender este proyecto de inversión?
2. ¿En cuál o cuáles de los proyectos de inversión que se han identificado, se debe colocar la cantidad limitada de dinero que está disponible para ser invertida?
3. Para satisfacer cierta necesidad, ¿cuál de las alternativas que se han detectado se debe escoger desde el ángulo financiero?

La *primera* pregunta corresponde al análisis de la conveniencia financiera de una inversión, cuando ésta se considera aisladamente: ¿es un buen negocio comprar este automóvil?. De hecho, nunca existe una decisión aislada ya que la decisión de *no* emprender el proyecto, implica atar los recursos a las oportunidades "normales" de inversión. Esta consideración es uno de los pilares centrales de la evaluación de proyectos y se refleja explícitamente en la determinación de la *tasa de interés de oportunidad*, que más adelante estudiaremos con detenimiento.

La *segunda* pregunta alude al problema conocido con el nombre de *racionamiento de capital (capital budgeting)*: si se dispone de un millón de pesos para inversión, ¿en qué forma se debe colocar esta suma para obtener el máximo rendimiento financiero?

La *tercera* pregunta está relacionada con la escogencia entre alternativas de inversión que son mutuamente excluyentes: existe la necesidad de construir un puente entre dos sitios. ¿Cuál es la mejor alternativa (en términos de dinero) entre construir un puente colgante, un puente de cemento, un puente metálico o un puente flotante? Para satisfacer la necesidad, claramente se debe escoger un solo tipo de puente.

La estructuración de una alternativa financiera de inversión

Los elementos que inicialmente se deben precisar para estructurar una alternativa de inversión conducente a su análisis y posterior evaluación financiera, son los siguientes:

1. Magnitud de los ingresos y egresos, medidos en unidades monetarias, por ejemplo pesos, dólares, soles, bolívares, etc.
2. Ubicación en el horizonte de tiempo, de los momentos en los cuales se producen los ingresos y los egresos.
3. Incertidumbre o riesgo asociados con la magnitud y la ubicación de los ingresos y egresos.

La evaluación financiera

Cuando un proyecto se analiza desde el punto de vista financiero, la cuantificación de los ingresos y egresos se hace con base en las sumas de dinero que el inversionista recibe, entrega o deja de recibir.

En este sentido, se trata de un análisis eminentemente microeconómico en el cual frecuentemente, aunque no siempre, los precios del mercado se utilizan para valorar los requerimientos y las retribuciones del proyecto.

Al adelantar el análisis financiero utilizando modelos matemáticos, es frecuente que resulten por una parte, beneficios financieros inferiores a los económicos, y por otra, costos financieros superiores a los económicos. Esta situación conduce a la frecuente sub valoración de la bondad del proyecto desde el punto de vista macroeconómico. Por consiguiente, si una inversión es atractiva para un individuo (criterio financiero) generalmente resulta ser aún más atractiva para toda la comunidad (criterio económico). También se da el caso de inversiones que no son aconsejables para un inversionista pero que sí lo son para toda la colectividad.

CASUISTICA: LA COMPRA DE UN APARTAMENTO

Mi amigo Fernando Plata, en varias ocasiones ha estado tentado con la idea de trasladarse a una morada más amplia y menos distante de su oficina. Sin embargo, sólo ahora su esposa lo ha enfrentado con la decisión de comprar un moderno y amplio apartamento.

Fernando es un hombre de intereses académicos e intelectuales y siente bastante desgano por analizar decisiones de naturaleza financiera. Por este motivo su mujer le ha dicho que si no le presta atención a esta posibilidad, adelantará el negocio sola.

En vista de lo anterior, mi amigo Fernando se ha visto ineludiblemente enfrentado con el problema de responder a la pregunta de si es acertado: comprar el apartamento, y una de las consideraciones que debe tener en cuenta, es la referente a la conveniencia financiera de su decisión.

Surge aquí un ejemplo del primer grupo de proyectos de inversión que se refiere al análisis de una alternativa aislada: ¿es conveniente para Fernando comprar el apartamento?. Mi amigo inicia el estudio de esta inversión precisando la magnitud y naturaleza de los recursos disponibles para emprender este proyecto. Por una parte, tiene \$ 1 millón en una cuenta de ahorros, y por otra, dispone de la casa que ahora habita. El apartamento en cuestión tiene un precio de \$ 70 millones y se puede pagar así:

Cuota Inicial o Enganche	\$30 millones
Pago dentro de 6 meses	\$20 millones
Pago dentro de 12 meses	\$20 millones

Como parte de pago los vendedores aceptarían la casa en \$ 30 millones, aunque Fernando la estima en \$40 millones. Puede además destinar sus primas y cesantías, que representan \$ 1'0 en julio 31 y \$ 3'0 en diciembre 31.

Lo anterior le indica a Fernando que dentro de seis meses tendría que pagar \$ 18'0 millones y al finalizar el año, \$ 17'0 millones. Si no cuenta con otros recursos fuera de los ya mencionados, simplemente no podría comprar el apartamento, aunque fuera el mejor negocio del mundo. Es decir, el proyecto no sería viable.

La viabilidad financiera

La viabilidad financiera es un aspecto de primordial importancia en la evaluación de proyectos, porque si los fondos disponibles no alcanzan para cubrir las erogaciones requeridas, simplemente no se puede emprender la inversión. Por este motivo, la viabilidad financiera precede al análisis de la conveniencia financiera, es decir, primero se debe establecer si la inversión *se puede hacer* y luego si *se debe hacer*.

La elaboración *del flujo de fondos* es un paso muy importante en el proceso de establecer la viabilidad del proyecto. Permite apreciar si los dineros requeridos están disponibles en los momentos adecuados, lo cual es de enorme importancia porque la viabilidad tiene que ver no sólo con los montos, sino también con la sincronización entre los requerimientos y las disponibilidades.

La señora de Fernando, una mujer muy emprendedora, decide poner en venta la casa que ahora habitan y logra hacer un negocio por \$ 40'0 millones así: \$ 10'0 millones ahora, \$ 15'0 millones dentro de 6 meses y \$ 15'0 millones dentro de un año

El padre de Fernando, hombre adinerado y excéntrico, al enterarse de todo lo anterior decide ayudarles, regalándoles \$ 20'0 millones. Con este fin, les entrega un cheque posfechado por tal monto, que sólo pueden cobrar dentro de un año.

Esta noticia produce gran alegría y se suma a la buena nueva de haber obtenido un crédito bancario de \$10'0 millones por cartera ordinaria. En estas nuevas circunstancias, para determinar si nuestros amigos pueden comprar el apartamento, es menester precisar la forma como se desarrollará el préstamo del banco

El préstamo bancario

La banca colombiana otorga en la actualidad créditos por cartera ordinaria con un período de amortización de un año y con el pago de intereses trimestrales, que oscilan entre el 22 y el 26% anual. Además de ser una operación financiera que se realiza con mucha frecuencia, el préstamo bancario por cartera ordinaria constituye un tipo de proyecto de inversión que vale la pena examinar en detalle.

Cuando se estipula un préstamo bancario con un plazo de amortización de 1 año se subentiende que el reembolso de la cantidad prestada se hará en cuatro contados iguales, que deben efectuarse al finalizar cada uno de los trimestres siguientes. En el momento de hacer cada uno de estos reembolsos. También es preciso cancelar los intereses anticipados correspondientes al saldo que el prestatario conserva durante el trimestre que empieza.

Así por ejemplo, obtener un préstamo de \$ 10'0 por cartera ordinaria al 24% anual, amortizable cada 3 meses, implica que dentro de 3, 6, 9 y 12 meses se deberá cancelar \$ 2'5 como reembolso del capital prestado.

Para la liquidación y cancelación de los intereses se sigue el siguiente razonamiento: al comenzar el período, el prestatario recibe \$ 10'0, de manera tal que la cantidad de dinero que conserva en su poder durante el primer trimestre, es la totalidad.

Para hacer sus cuentas, el banco parte de la tasa de interés que anuncia como aplicable al crédito otorgado. Esta tasa se llama *nominal* (j) por razones que se expondrán más adelante. En nuestro ejemplo, la tasa de interés nominal anual es 24%, pagadero en periodos mensuales, que para efectos de las operaciones aritméticas se escribirá como 0.24, es decir como una fracción.

El banco calcula la tasa de interés nominal mensual dividiendo la anual por los doce meses del año. En el ejemplo, $0.24 \div 12 = 0.020000$ mes anticipado. De manera similar, el banco establece que la tasa efectiva (i) por trimestre es en este caso $(0.020000)^3 = 0.061208$, ya que existen cuatro trimestres en un año. Por lo tanto, el banco utiliza 0.061208 como tasa trimestral, o expresando este interés en términos porcentuales, el 6.1208% por trimestre anticipado.

En razón de que el prestatario disfruta durante el primer trimestre de la posesión de los \$ 10'0 que le entrega el banco, la institución financiera le cobra un interés del 6.1208% trimestral por tal privilegio. En sumas específicas, el monto de los intereses durante el primer trimestre asciende a

$$\$ 10'0 \times 0.061208 = \$ 612.080.0$$

Como mencionamos anteriormente, el banco cobra esta cantidad al comienzo del trimestre y no a su terminación, razón por la cual se habla de *intereses anticipados*, en contraste con los habitualmente pactados, que son *vencidos*.

Al concluir el primer trimestre, el prestatario devuelve \$ 2'5 millones como abono a su deuda de capital, de manera tal que durante el segundo período trimestral, la cantidad de préstamo que él retiene es:

$$\$ 10'0 - \$ 2'5 = \$ 7'5$$

En consecuencia, los intereses que el banco liquida para el segundo trimestre son:

$$\$ 7'5 \times 0.061208 = \$ 459.060.0$$

Los cuales deben ser cancelados al inicio del segundo trimestre, por tratarse como ya dijimos de intereses anticipados. Siguiendo un tren de raciocinio idéntico, podemos establecer que los intereses correspondientes al tercer trimestre son:

$$\$ 5'0 \times 0.061208 = \$ 306.040.0$$

y los del último período trimestral,

$$\$ 2'5 \times 0.061208 = \$ 153.020.0$$

Los cuales deben cancelarse al comenzar el trimestre respectivo.

Un hecho que vale la pena destacar es que al cobrar intereses *anticipados* en lugar de *vencidos* el préstamo en realidad no es por \$ 10'0, sino por algo menos de \$ 9'400 (cantidad que efectivamente recibe el prestatario).

Todo lo anterior se puede considerar en forma general, ligeramente abstracta. Si (k) es la cantidad de dinero que el banco accede a entregar en préstamo, y (j) la tasa de interés nominal anual que esta institución cobra (expresada como una fracción), entonces la operación de préstamo por cartera ordinaria que efectivamente se realiza es la siguiente:

1. El banco liquida un interés trimestral de ($j/4$), que resulta de dividir el interés anual por el número de trimestres del año.
2. Al final de cada trimestre, o sea a los 3, 6, 9 y 12 meses, el banco exige que se amortice una cuarta parte del préstamo, es decir ($k/4$).
3. Como el banco cobra los intereses por anticipado, en el momento inicial en que se recibe el préstamo, se deben cancelar los intereses correspondientes al primer trimestre, que valen $k (j/4)$.

En consecuencia, y debido a esta cancelación anticipada de interés, el cliente beneficiado con el préstamo, efectivamente recibe $k - k (j/4)$ en lugar de k .

4. Al concluir el tercer mes, además de la primera amortización de capital, se deben cancelar por anticipado los intereses correspondientes al segundo trimestre. Durante todo el segundo trimestre la cantidad que se conserva en préstamo es ($0.75 k$), ya que al finalizar el primer trimestre se ha devuelto (0.25) del préstamo inicial.

Por consiguiente, los intereses correspondientes a este segundo período son ($0.75 k$) \times ($j/4$) y el pago total que el cliente hace al banco al finalizar el tercer mes es:

$$0.25 k + (0.75 (j/4))$$

- 5- Cuando termina el segundo trimestre, lo cual acontece a los 6 meses de iniciado el préstamo, el cliente debe cancelar otra cuarta parte del principal: sea $0.25 k$. Además, debe pagar por anticipado los intereses correspondientes al tercer trimestre, que ascienden a $0.50 k (j/4)$.

De esta manera el pago total al finalizar el sexto mes es: $0.25 k + 0.50 k (j/4)$.

- 6- Repitiendo el raciocinio anterior, se puede establecer que al finalizar el tercer trimestre, el cliente debe cancelar $0.25 k + 0.25 k (j/4)$.

Y al concluir el último trimestre (a los 12 meses de iniciada la operación), es preciso pagar la última cuota que no incluye intereses, ya que éstos han sido pagados por anticipado. Esta última erogación es simplemente $0.25 k$.

Más adelante ilustraremos cómo el anterior esquema conduce a que un préstamo bancario de cartera ordinaria con *interés nominal* de 24% anual pagaderos por mensualidades vencidas, constituye en realidad un préstamo por el cual se cobra una *tasa efectiva* o *real* del 26.8241% anual.

Conclusión del Caso

El flujo neto de caja muestra claramente que Fernando no cuenta con los recursos necesarios para adquirir el apartamento; esto acontece porque los egresos netos finales se requieren antes de recibir los ingresos.

En la primera opción, es decir cuando el vendedor del apartamento le recibe la casa por \$ 30'0 y Fernando aplica sus ahorros y sus Prestaciones laborales para el pago del inmueble nuevo, simplemente podemos concluir que le faltan recursos por \$ 35'0.

Mediante **la segunda opción**, es decir cuando venden la casa actual en \$ 40'0 y recibe una generosa donación de su padre, observamos que el déficit de recursos se disminuye a \$ 5'0 pero sigue siendo alto y no le permite a mi amigo realizar la inversión.

Y para el caso en el que obtiene un crédito bancario, el déficit se incrementa por efecto de los intereses, y aún todavía le siguen faltando \$ 6'530.2 pesos para poder concretar la compra.

Tal vez podría pedirle a su padre que el regalo lo hiciera efectivo ahora, o por lo menos siguiendo el ritmo de desembolsos estimados. De lo contrario, simplemente tendría que olvidarse del apartamento.

Todo el análisis que hemos venido haciendo ilustra la enorme importancia que tiene el estudio cuidadoso y muy específico de los movimientos de dinero que acompañan a la inversión en perspectiva.

En términos generales, es fácil y frecuente formarse la impresión de que es posible adelantar una determinada inversión, pero concluimos que no es así, al describir en detalle los flujos de dinero que ocasiona, también es frecuente descubrir períodos en los cuales se presentan saldos negativos considerables, que requieren financiación adicional no prevista inicialmente.

Por tal motivo el estudio de la viabilidad financiera, es decir, la determinación de si es posible adelantar el proyecto de inversión, constituye la parte inicial de cualquier análisis de factibilidad; si no es posible obtener los fondos para atender a las necesidades que una inversión genera, ésta queda descalificada desde un principio.

Ahora que hemos entendido mediante este sencillo ejemplo, la importancia del uso de los modelos matemáticos en los negocios cotidianos que realizan las personas y entidades, solo nos resta ilustrar los flujos de dinero generados en las diferentes alternativas analizadas, mediante la representación gráfica de las conclusiones obtenidas.