

# **ANALISIS DE TENDENCIA**

## **1) INTRODUCCIÓN**

Las series de tiempo llamadas también series cronológicas o series históricas son un conjunto de datos numéricos que se obtienen en períodos regulares y específicos a través del tiempo, los tiempos pueden ser en años, meses, semanas, días u otra unidad adecuada al problema que se esté trabajando. Ejemplos de series de tiempo son: Ventas mensuales de un producto en una empresa, producción total anual de petróleo en Ecuador durante un cierto número años o las temperaturas anunciadas cada hora por el meteorólogo para un aeropuerto.

Matemáticamente, una serie de tiempo se define por los valores  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  de una variable  $Y$  (ventas mensuales, producción total, etc.) en tiempos  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . Si se reemplaza a  $X$  por la variable tiempo, estas series se definen como distribuciones de pares ordenados  $(X, Y)$  en el plano cartesiano, siendo  $Y$  una función de  $X$ ; esto se denota por:

$$Y = f(t) \rightarrow Y = f(X)$$

El principal objetivo de las series de tiempo es hacer proyecciones o pronósticos sobre una actividad futura, suponiendo estables las condiciones y variaciones registradas hasta la fecha, lo cual permite planear y tomar decisiones a corto o largo plazo. Después, con base en esa situación ideal, que supone que los factores que influyeron en la serie en el pasado lo continuarán haciendo en el futuro, se analizan las tendencias pasadas y el comportamiento de las actividades bajo la influencia de ellas; por ejemplo, en la proyección de ventas de un producto o de un servicio de una empresa se calculan los posibles precios, la reacción del consumidor, la influencia de la competencia, etc.

Es necesario describir la tendencia ascendente o descendente a largo plazo de una serie cronológica por medio de alguna línea, y la más adecuada será la que mejor represente los datos y sea útil para desarrollar pronósticos. Para lograr la estimación de la tendencia se utilizan con más frecuencia los siguientes métodos:

## **2) MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS**

Este método ya se estudió en el capítulo anterior, en el que se indicó las formas para hallar la ecuación de una recta de mínimos cuadrados. Con esta recta se obtendrán los valores de tendencia.

### **Ejemplo ilustrativo:**

Con los siguientes datos acerca de las ventas en millones de dólares de la Empresa M & M:

<b>Año (X)</b>	<b>Ventas (Y)</b>
1998	3,4
1999	3,1
2000	3,9
2001	3,3
2002	3,2

2003	4,3
2004	3,9
2005	3,5
2006	3,6
2007	3,7
2008	4
2009	3,6
2010	4,1
2011	4,7
2012	4,2
2013	4,5

- 1) Hallar la ecuación de tendencia por el método de los mínimos cuadrados.
- 2) Pronosticar la tendencia de exportación para el 2014.
- 3) Elaborar la gráfica para los datos y la recta de tendencia.

**Solución:**

1) Para hallar la ecuación de tendencia por el método de los mínimos cuadrados se llena la siguiente tabla, codificando la numeración de los años como  $X$ , y las Ventas como  $Y$ , y así consecutivamente para facilitar los cálculos.

Año (X)	X	Y	XY	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>
1998	1	3,4	3,40	1	11,56
1999	2	3,1	6,20	4	9,61
2000	3	3,9	11,70	9	15,21
2001	4	3,3	13,20	16	10,89
2002	5	3,2	16,00	25	10,24
2003	6	4,3	25,80	36	18,49
2004	7	3,9	27,30	49	15,21

2005	8	3,5	28,00	64	12,25
2006	9	3,6	32,40	81	12,96
2007	10	3,7	37,00	100	13,69
2008	11	4	44,00	121	16,00
2009	12	3,6	43,20	144	12,96
2010	13	4,1	53,30	169	16,81
2011	14	4,7	65,80	196	22,09
2012	15	4,2	63,00	225	17,64
2013	16	4,5	72,00	256	20,25
<b>Total</b>	<b>136</b>	<b>61</b>	<b>542,3</b>	<b>1496</b>	<b>235,86</b>

Reemplazando valores en las siguientes fórmulas se obtiene los valores de  $a_0$  y  $a_1$ :

$$a_0 = \frac{\sum Y \cdot \sum X^2 - \sum X \cdot \sum XY}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{61 \cdot 1496 - 136 \cdot 542,3}{16 \cdot 1496 - (136)^2} = \frac{17503,2}{5440} = 3,2175 = 3,22$$

$$a_1 = \frac{N \sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{16 \cdot 542,3 - 136 \cdot 61}{16 \cdot 1496 - (136)^2} = \frac{380,8}{5440} = 0,07$$

#### Interpretación:

- El valor  $a_1 = 0,07$  al ser positiva indica que existe una tendencia ascendente de las exportaciones aumentando a un cambio o razón promedio de 0,07 millones de dólares por cada año.

- El valor de  $a_0 = 3,22$  indica el punto en donde la recta interseca al eje Y cuando  $X = 0$ , es decir indica las exportaciones estimadas para el año 2014 igual a 3,22.

Reemplazado los valores anteriores en la recta de tendencia se obtiene:

$$Y = a_0 + a_1X$$

$$Y = 3,22 + 0,07X$$

2) Para pronosticar la tendencia de exportación para el 2011 se reemplaza  $X = 17$  en la recta de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

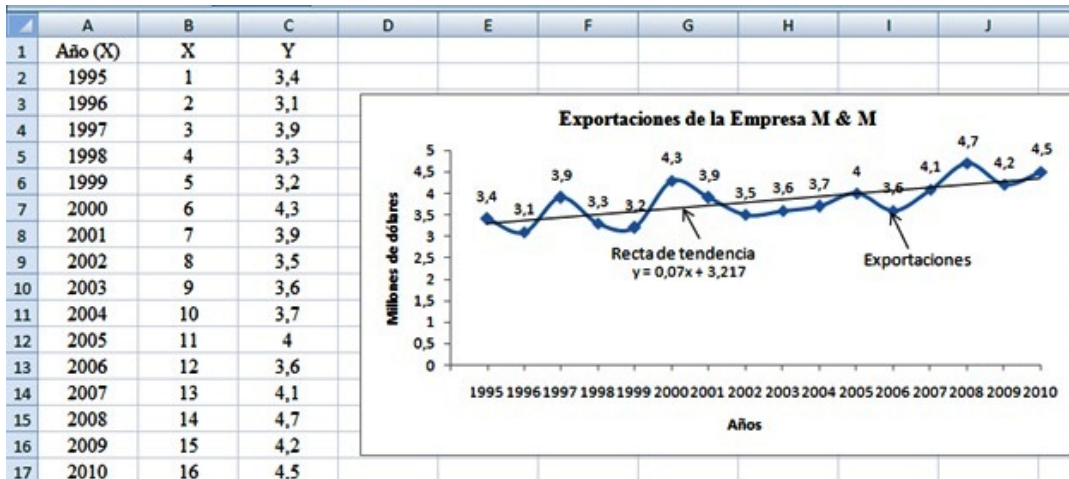
$$Y = 3,22 + 0,07X$$

$$Y = 3,22 + 0,07 \cdot 17 = 4,41$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Año (X)	X	Y	XY		X <sup>2</sup>		Y <sup>2</sup>	Pronóstico			
2	1995	1	3,4	3,40	=B2*C2	1	=B2^2	11,56	=C2^2			
3	1996	2	3,1	6,20	=B3*C3	4	=B3^2	9,61	=C3^2			
4	1997	3	3,9	11,70	=B4*C4	9	=B4^2	15,21	=C4^2			
5	1998	4	3,3	13,20	=B5*C5	16	=B5^2	10,89	=C5^2			
6	1999	5	3,2	16,00	=B6*C6	25	=B6^2	10,24	=C6^2			
7	2000	6	4,3	25,80	=B7*C7	36	=B7^2	18,49	=C7^2			
8	2001	7	3,9	27,30	=B8*C8	49	=B8^2	15,21	=C8^2			
9	2002	8	3,5	28,00	=B9*C9	64	=B9^2	12,25	=C9^2			
10	2003	9	3,6	32,40	=B10*C10	81	=B10^2	12,96	=C10^2			
11	2004	10	3,7	37,00	=B11*C11	100	=B11^2	13,69	=C11^2			
12	2005	11	4	44,00	=B12*C12	121	=B12^2	16,00	=C12^2			
13	2006	12	3,6	43,20	=B13*C13	144	=B13^2	12,96	=C13^2			
14	2007	13	4,1	53,30	=B14*C14	169	=B14^2	16,81	=C14^2			
15	2008	14	4,7	65,80	=B15*C15	196	=B15^2	22,09	=C15^2			
16	2009	15	4,2	63,00	=B16*C16	225	=B16^2	17,64	=C16^2			
17	2010	16	4,5	72,00	=B17*C17	256	=B17^2	20,25	=C17^2			
18	2011									4,41	=S0523+S0526*(B17+1)	
19	Total	136	61	542,30		1496		235,86				
20		=SUMA(B2:B18)	=SUMA(C2:C17)	=SUMA(D2:D17)		=SUMA(F2:F18)		=SUMA(H2:H17)				
21	N	16	CONTAR(B2:B17)									
22												
23	$a_0 = \frac{\sum Y - \sum X^2 - \sum X \cdot \sum XY}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$			3,22				= (C19*F19-B19*D19)/(B21*F19-(B19)^2)				
24												
25	$a_1 = \frac{N \sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$			0,070				= (B21*D19-B19*C19)/(B21*F19-(B19)^2)				
26												
27												

3) La gráfica de los datos y la recta de tendencia elaborada en Excel se muestran en la siguiente figura:



### 3) MÉTODO DE LOS SEMIPROMEDIOS

Este método se aplica con el objeto de simplificar los cálculos y consiste en:

- Agrupar los datos en dos grupos iguales
- Obtener el valor central (mediana) de los tiempos y la media aritmética de los datos de cada grupo, consiguiéndose así dos puntos de la recta de tendencia  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$
- Estos valores se reemplazan en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} Y_1 = a_0 + a_1 X_1 \\ Y_2 = a_0 + a_1 X_2 \end{cases}$$

- Resolviendo el sistema se encuentran los valores de  $a_0$  y  $a_1$  los cuales se reemplazan en la ecuación de la recta de tendencia, la cual es:

$$Y = a_0 + a_1X$$

Con esta recta de tendencia se puede realizar pronósticos, los cuales son menos exactos que los obtenidos con el método de los mínimos cuadrados, sin embargo, su diferencia es mínima.

### **Ejemplo ilustrativo**

Con los siguientes datos sobre las ventas en millones de dólares de la Empresa D & M

<b>Año</b>	<b>Ventas</b>
2000	1,5
2001	1,8
2002	2
2003	1,5
2004	2,2
2005	2
2006	3
2007	2,8
2008	2,4
2009	2,9
2010	3

- 1) Hallar la ecuación de tendencia por el método de los semipromedios.
- 2) Pronosticar la tendencia de ventas para el 2011.
- 3) Elaborar la gráfica para los datos y la recta de tendencia.

### **Solución:**

- 1) Se codifica la numeración de los años 2000 como 1, 2001 como 2, y así consecutivamente para facilitar los cálculos. Se agrupa en dos grupos iguales.

Año	X	Y	Valor central X	Semipromedio Y
2000	1	1,5	3	1,8
2001	2	1,8		
2002	3	2		
2003	4	1,5		
2004	5	2,2		
2005	6	2		
2006	7	3	9	2,82
2007	8	2,8		
2008	9	2,4		
2009	10	2,9		
2010	11	3		

El año 2005 se dejó por fuera para tener grupos con el mismo número de años. El valor central de 3 corresponde a la mediana del primer grupo 1, 2, 3, 4 y 5. El valor central de 9 corresponde a la mediana del segundo grupo 7, 8, 9, 10 y 11. El semipromedio 1,8 corresponden a la media aritmética del primer grupo. El semipromedio 2,82 corresponden a la media aritmética del segundo grupo. De esta manera se obtienen dos puntos (3, 1.8) y (9, 2.82) de la recta de tendencia.

Reemplazando los puntos en el siguiente sistema se obtiene:

$$\begin{cases} Y_1 = a_0 + a_1 X_1 \\ Y_2 = a_0 + a_1 X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,8 = a_0 + 3a_1 \\ 2,82 = a_0 + 9a_1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema empleando la regla de Cramer se obtiene:

$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1,8 & 3 \\ 2,82 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{7,74}{6} = 1,29$$

$$a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1,8 \\ 1 & 2,82 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{1,02}{6} = 0,17$$

Como  $a_1$  es positiva, la recta tiene una tendencia ascendente (pendiente positiva).

Reemplazando los valores calculados se tiene la recta de tendencia, la cual es:

$$Y = a_0 + a_1 X$$

$$Y = 1,29 + 0,17X$$

2) Para pronosticar la tendencia de exportación para el 2011 se reemplaza  $X = 12$  en la recta de tendencia, obteniendo el siguiente resultado:

$$Y = 1,29 + 0,17X$$

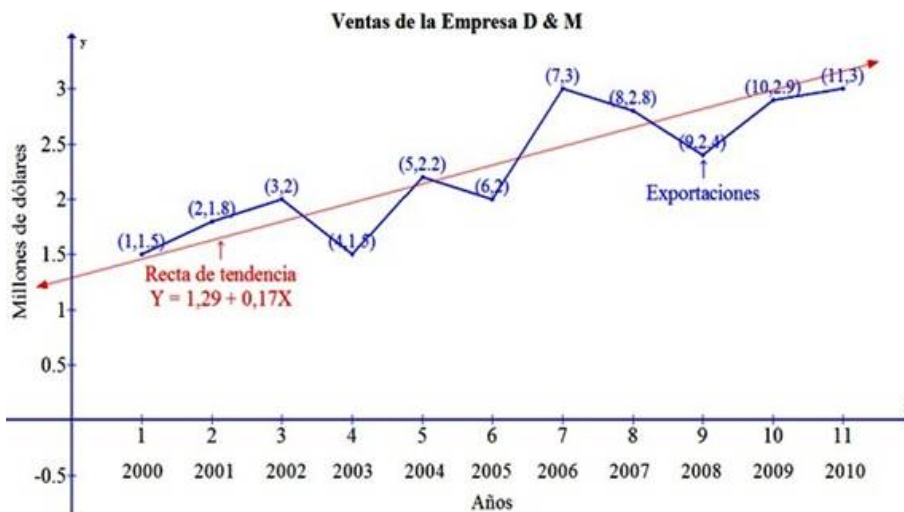
$$Y = 1,29 + 0,17 \cdot 12 = 3,33$$

**Interpretación:** Existe una tendencia ascendente a un cambio promedio de 0,17 millones de dólares por cada año, por lo que el Gerente de ventas de la empresa debe seguir aplicando las políticas necesarias para mantener la tendencia ascendente y mejorar la tasa de crecimiento.

*Los cálculos realizados en Excel se muestran en la siguiente figura:*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Año (X)	X	Y	Valor central X		Semipomedio Y		Pronóstico	
2	2000	1	1,5						
3	2001	2	1,8						
4	2002	3	2	3	=MEDIANA(B2:B6)	2	=PROMEDIO(C2:C6)		
5	2003	4	1,5						
6	2004	5	2,2						
7	2005	6	2						
8	2006	7	3						
9	2007	8	2,8						
10	2008	9	2,4	9	=MEDIANA(B8:B12)	2,82	=PROMEDIO(C8:C12)		
11	2009	10	2,9						
12	2010	11	3						
13	2011	12						3,33	=H19+H22*B13
14									
15		$Y = a_0 + a_1 X$							
16	1,8	1	3		6	=MDETERM(B16:C17)			
17	2,82	1	9						
18									
19		1,80	3		7,74	=MDETERM(B19:C20)		1,29	=E19/E16
20		2,82	9						
21									
22		1	1,80		1,02	=MDETERM(B22:C23)		0,17	=E22/E16
23		1	2,82						

3) La gráfica de los datos y la recta de tendencia elaborada en Graph se muestran en la siguiente figura:



### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**BENALCÁZAR**, Marco, (2002), Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación, SUÁREZ, Mario Ed. Graficolor, Ibarra, Ecuador.

**DAZA**, Jorge, (2006), Estadística Aplicada con Microsoft Excel, Grupo Editorial Megabyte, Lima, Perú.

**SHAO**, Stephen, (1980), Estadística para Economistas y Administradores de Empresas, Ed. Herrero Hnos, México DF.

**SPIEGEL**, Murray, (2000), Estadística, Serie de Compendios Schaum, Ed. McGraw-Hill, México.